

Harmonische Reihe

Man kann beispielsweise (Holz-)Bretter oder Bücher so stapeln, dass diese einen gewissen Überhang erzeugen. In nebenstehender Abbildung ist dies mit Holzklötzen so dargestellt, dass der Turm gerade noch stabil ist. Der Überhang ist die Größe der horizontalen Verschiebung des obersten zum untersten Objekt. In der Abbildung beträgt der Überhang in etwa die Länge eines Holzklotzes.

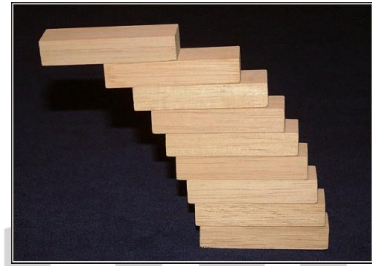


Abbildung 1: Gestapelte Holzklötze
(Bildquelle: Anton via [Wikimedia Commons](#) [CC BY 2.5])

? Wie groß kann der Überhang maximal werden?

Aufgabe 1: Nehmen Sie sich zwei Holzbretter und stapeln Sie diese so, dass der Überhang maximal wird.

- Erstellen Sie dann eine Skizze der Seitenansicht der Holzbretter. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Länge eines einzelnen Holzbretts 1 beträgt. Wie groß ist der Überhang? In welchem Zusammenhang steht dieser zum Schwerpunkt des oberen Klotzes?
- Da der maximale Überhang in Zusammenhang mit dem Schwerpunkt eines Objekts steht, wollen wir diesen für den kommenden Schritt bestimmen: Berechnen Sie die x -Koordinate des Schwerpunkts des Körpers, den beide Holzbretter zusammen bilden. Nehmen Sie vereinfacht an, dass ein einzelnes Holzbrett die Masse sowie Länge 1 besitzt.

Hinweis: Die x -Koordinate des Schwerpunkts S (bezeichnet als x_S), den zwei Körper bilden, berechnet sich als $x_S = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$, wobei x_1, x_2 die x -Koordinaten der Schwerpunkte der beiden Körper und m_1, m_2 die Massen der beiden Körper sind.

Aufgabe 2: Fügen Sie Ihrem Turm ein drittes Holzbrett hinzu und maximieren Sie wieder den Überhang.

- Erstellen Sie wieder eine Skizze in der Seitenansicht. Markieren Sie in der Skizze auch den ermittelten Schwerpunkt aus Aufgabe 1b). Welcher Zusammenhang besteht zur Anordnung mit lediglich zwei Holzbrettern?
- Wie groß ist der gesamte Überhang?
- Berechnen Sie die x -Koordinate des Schwerpunkts des Körpers, den die drei Holzbretter zusammen bilden.

Aufgabe 3: Um die Frage nach dem maximal möglichen Überhang zu beantworten, wollen wir nun eine beliebige Anzahl an Holzbrettern betrachten.

- a) Berechnen Sie die x -Koordinate des Schwerpunkts des Körpers, den n viele Holzbretter zusammen bilden.
- b) Berechnen Sie die Größe des gesamten Überhangs, wenn n viele Holzbretter zusammen überhängen (d.h. ein $(n + 1)$ -tes Brett als unterstes liegt).
- c) Welchen Wert kann der Überhang aus Aufgabe 3b) maximal annehmen? Nutzen Sie Ihr Wissen über die harmonische Reihe.

